

## FÍSICA (INFORMÁTICA DE GESTIÓN)

Febrero de 2002

SOLUCIONES

Primera vuelta

### PROBLEMA 1.1.1

Tenemos tres cargas situadas como indica la figura P1.1.1. Calcular el flujo del campo eléctrico a través de la superficie de la esfera  $S_1$ , así como de la esfera  $S_2$ .

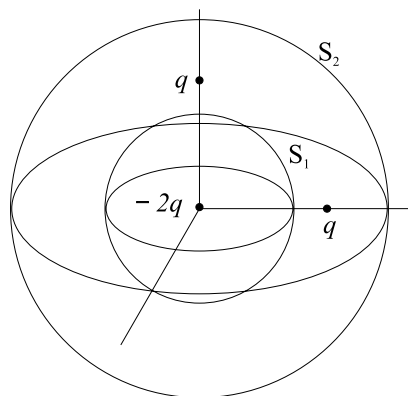


Figura P1.1.1

### Solución

Para resolver este problema se aplica el teorema de Gauss..

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_o} \sum q_i$$

El flujo total a través de una superficie cerrada es igual a la suma algebraica de las cargas que encierra.

*Superficie  $S_1$*

Únicamente hay una carga  $-2q$ , por tanto,

$$\Phi_1 = \frac{1}{\epsilon_o}(-2q) = -\frac{2q}{\epsilon_o}$$

*Superficie  $S_2$*

Esta superficie encierra las cargas  $-2q$ ,  $q$  y  $q$ , en consecuencia,

$$\Phi_2 = \frac{1}{\epsilon_o}(-2q + q + q) = 0$$

### PROBLEMA 1.1.2

Dado el circuito eléctrico indicado en la figura P1.1.2, calcular la corriente que circula por cada una de las pilas. Indicar las pilas que suministran o reciben energía.

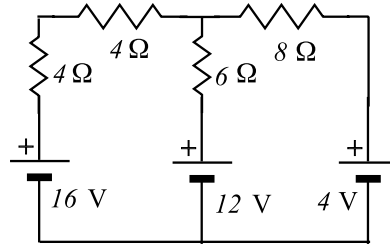


Figura P1.1.2

### Solución

Utilizamos el método de mallas para resolver este circuito. Asignamos una corriente  $I_1$  en sentido horario al primer lazo y un corriente  $I_2$  con el mismo sentido en el lazo segundo.

Con estas condiciones las ecuaciones de malla son:

$$\begin{aligned} 16 - 12 &= (4 + 4 + 6)I_1 - 6I_2 &\rightarrow 4 &= 14I_1 - 6I_2 &\rightarrow 2 &= 7I_1 - 3I_2 \\ 12 - 4 &= -6I_1 + (6 + 8)I_2 &\rightarrow 8 &= -6I_1 + 14I_2 &\rightarrow 4 &= -3I_1 + 7I_2 \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones por el método de Cramer.

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{26}{40} = 0,65 ; \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{34}{40} = 0,85$$

Las corrientes de lazo son respectivamente,

$$I_1 = 0,65 \text{ [A]} \quad \text{y} \quad I_2 = 0,85 \text{ [A]}$$

La corriente que circula por la rama común es,

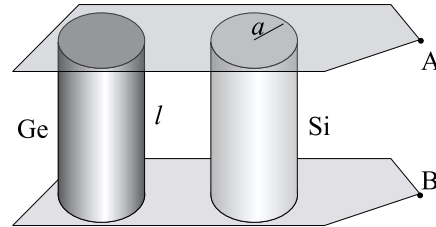
$$I_c = I_2 - I_1 = 0,85 - 0,65 = 0,2 \text{ [A]}$$

Teniendo en cuenta las corrientes podemos deducir que las pilas de 16 y 12 voltios suministran energía, ya que la corriente entra por el polo negativo y sale por el positivo. La por la de 4 voltios recibe energía, ya que la corriente  $I_2$  entra por el polo positivo y sale por el negativo.

### PROBLEMA 1.1.3

Dispuestas en paralelo, como muestra la figura P1.1.3, tenemos dos barras cilíndricas cuyas dimensiones son: longitud  $l = 10 \text{ cm}$  y radio  $a = 1 \text{ cm}$ . Una barra está construida con Ge puro, es decir, sin dopar, y la otra con Si puro. A  $300^\circ\text{K}$ , para el Ge  $n_i \simeq 2 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ ,  $\mu_n \simeq 3900 \text{ cm}^2 (\text{V}\cdot\text{s})^{-1}$ ,  $\mu_p \simeq 1800 \text{ cm}^2 (\text{V}\cdot\text{s})^{-1}$ , y para el Si  $n_i \simeq 1,45 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ ,  $\mu_n \simeq 1500 \text{ cm}^2 (\text{V}\cdot\text{s})^{-1}$ ,  $\mu_p \simeq 475 \text{ cm}^2 (\text{V}\cdot\text{s})^{-1}$ . La carga del electrón es  $e \simeq 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

Calcular la resistencia que se mediría desde los puntos A y B si suponemos que las placas que unen las barras son conductores sin resistencia. Si se calienta la barra de Ge, ¿aumenta o disminuye la resistencia entre AB?. razonar la respuesta.



**Figura P1.1.3**

### Solución

#### Resistencia

En primer lugar calculamos la conductividad de las barras.

La conductividad del germanio (Ge) será,

$$\gamma_G = en_i(\mu_n + \mu_p) \simeq 1,6 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^{13}(3900 + 1800) \quad [\text{C V}^{-1} \text{s}^{-1} \text{cm}^{-1}]$$

$$\gamma_G = 0,01824 \quad [\text{C V}^{-1} \text{s}^{-1} \text{cm}^{-1}]$$

La conductividad del silicio (Si) será,

$$\gamma_S = 1,6 \times 10^{-19} \times 1,45 \times 10^{10}(1500 + 475) \quad [\text{C V}^{-1} \text{s}^{-1} \text{cm}^{-1}]$$

$$\gamma_S = 4,582 \times 10^{-6} \quad [\text{C V}^{-1} \text{s}^{-1} \text{cm}^{-1}]$$

Ahora calculamos la resistencia de cada barra.

La resistencia de la barra de germanio es,

$$R_G = \frac{1}{\gamma_G} \frac{l}{\pi a^2} = \frac{1}{0,01824} \frac{10}{\pi} = 174,51 \quad [\text{C V}^{-1} \text{s}^{-1} \text{cm}^{-1}]^{-1} [\text{cm}^{-1}]$$

$$R_G = 174,51 \quad [\Omega]$$

La correspondiente a la barra de silicio es,

$$R_S = \frac{1}{\gamma_S} \frac{l}{\pi a^2} = \frac{1}{4,582 \times 10^{-6}} \frac{10}{\pi} = 6,947 \times 10^5 \quad [\text{C V}^{-1} \text{s}^{-1} \text{cm}^{-1}]^{-1} [\text{cm}^{-1}]$$

$$R_S = 6,947 \times 10^5 \quad [\Omega]$$

Como las barras están dispuestas en paralelo,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_G} + \frac{1}{R_S} \rightarrow R = \frac{R_G R_S}{R_G + R_S}$$

$$R = \frac{174,51 \times 6,947 \times 10^5}{174,51 + 6,947 \times 10^5} = 174,47 \text{ } [\Omega]$$

Vemos que la resistencia total es menor que la de cualesquiera de las barras.

*Variación con la temperatura*

La expresión para la resistencia es,

$$R = \frac{R_G R_S}{R_G + R_S} = \frac{R_G}{1 + R_G/R_S} < R_G$$

Cuando se calienta la barra de germanio su resistencia disminuye al aumentar el número de portadores de carga.

Como siempre la resistencia total es menor que  $R_G$ , al disminuir  $R_G$  disminuye  $R$ .

# FÍSICA (INFORMÁTICA DE GESTIÓN)

Febrero de 200

SOLUCIONES

Segunda vuelta

## PROBLEMA 1.2.2

Tenemos cuatro cargas puntuales sobre los vértices de un cuadrado cuyo lado es  $a$  y su centro el origen de coordenadas.  $q_1 = -q$ ,  $q_2 = 2q$ ,  $q_3 = -q$  y  $q_4 = 2q$ . Calcular el campo y potencial eléctrico en el origen O. Si ponemos una carga  $q$  en el origen O, ¿se mantendrá estable en dicho punto?. Razonar la respuesta suponiendo un pequeño desplazamiento de la carga con respecto a O.

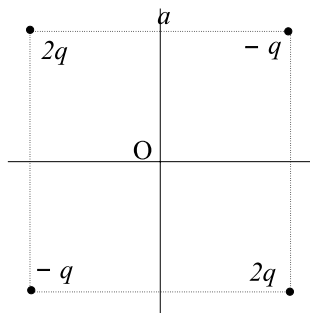


Figura P1.2.1

## Solución

Para calcular el campo usamos la expresión

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^4 \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i)$$

donde  $\mathbf{r} = 0$  y,

$$q_1 = -q, \quad q_2 = 2q, \quad q_3 = -q, \quad q_4 = 2q$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= \frac{a}{2} (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y); & \mathbf{r}'_2 &= \frac{a}{2} (\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y) \\ \mathbf{r}'_3 &= \frac{a}{2} (-\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y); & \mathbf{r}'_4 &= \frac{a}{2} (-\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) \end{aligned}$$

Se puede ver que todas las distancias son iguales: para cualquier  $i$  tenemos,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{2\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

y por tanto

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|^3 = \frac{a^3}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}a^3}{4}$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(0) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{a}{2} \frac{2\sqrt{2}}{a^3} \{q(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y) - 2q(\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y) \\ & + q(-\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y) - 2q(-\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y)\}\end{aligned}$$

Agrupando términos,

$$\mathbf{E}(0) = \frac{q\sqrt{2}}{\pi\epsilon_o a^2} (\mathbf{u}_x (1 - 2 - 1 + 2) + \mathbf{u}_y (1 + 2 - 1 - 2))$$

Vemos que ambas componentes,  $x$ ,  $y$ , se hacen nulas, por tanto,

$$\mathbf{E} = 0$$

Para calcular el potencial usamos la expresión,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \sum_{i=1}^4 \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|}$$

donde  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'_i$ ,  $q_i$  son las mismas que en el caso anterior. Por tanto,

$$\begin{aligned}V(0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left( \frac{-q}{a/\sqrt{2}} + \frac{2q}{a/\sqrt{2}} + \frac{-q}{a/\sqrt{2}} + \frac{2q}{a/\sqrt{2}} \right) \\ V(0) &= \frac{2q\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_o a} = \frac{q\sqrt{2}}{2\pi\epsilon_o a}\end{aligned}$$

Si ahora calculamos la energía de una carga de prueba positiva  $q$  situada en el origen,

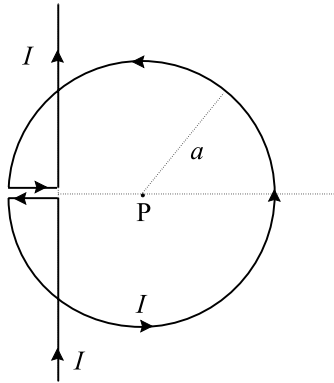
$$W = qV(0) = \frac{q^2\sqrt{2}}{2\pi\epsilon_o a}$$

Como vemos, esta energía es positiva y por tanto mayor que la energía potencial en infinito que por convención es 0. Por tanto, en una primera aproximación, podemos decir que la carga no está en equilibrio porque tiende disminuir su energía potencial, esto es, desplazarse hasta infinito.

En un cálculo más elaborado habría que analizar la existencia de mínimos de potencial locales alrededor del origen.

### PROBLEMA 1.2.1

Tenemos un sistema de conductores conectados entre sí como muestra la figura P1.2.2. Se supone que la separación entre los conductores que une la parte recta con la circunferencia están muy próximos pero sin tocarse. El radio de la circunferencia es  $a$  y la distancia entre los hilos verticales y el centro de la circunferencia es  $h = 2a/\pi$ . Calcular el campo magnético  $\mathbf{B}$  en el punto P (centro de la circunferencia).



**Figura P1.2.2**

### Solución

El campo total es la suma de los campos debidos a los siguientes tramos por los que circula corriente: los hilos rectos semiinfinitos, la circunferencia y los dos tramos cortos paralelos. Calculamos cada caso con la fórmula general,

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Como queremos calcular el campo en el punto P, donde suponemos el origen de coordenadas, tenemos que, en todos los casos,  $\mathbf{r} = 0$ . Tomamos los ejes de forma que la figura está en el plano XY (como siempre, Y ordenada y X abscisa) y el eje Z positivo es un vector que "sale" del papel.

#### 1. Tramos paralelos

En este caso, para ambos tramos,  $d\mathbf{l}$  es paralelo a  $\mathbf{u}_x$  y también el vector  $\mathbf{r}'$  es paralelo a  $\mathbf{u}_x$ . Por tanto, como el producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo,  $d\mathbf{l} \times \mathbf{r}' = 0$  y

$$\mathbf{B}_1(P) = 0$$

#### 2. Circunferencia de radio a centrada en P

Ahora escribimos las variables en coordenadas polares para ajustarnos a la simetría del problema. En este caso  $\mathbf{r}' = a\mathbf{u}_r$  y  $d\mathbf{l} = a d\varphi \mathbf{u}_\varphi$  donde el ángulo  $\varphi$  recorre un ángulo que va desde  $-\pi$  hasta  $\pi$  (véase figura; el origen de ángulos lo tomamos en el eje x-positivo y en sentido contrario a las agujas del reloj). Sustituyendo,

$$d\mathbf{B}_2(P) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{a d\varphi \mathbf{u}_\varphi \times (-a\mathbf{u}_r)}{a^3}$$

sabiendo que  $\mathbf{u}_\varphi \times (-\mathbf{u}_r) = \mathbf{u}_z$  (esto es, un vector que "sale" del papel),

$$d\mathbf{B}_2(P) = \frac{\mu_o I}{4\pi} \frac{d\varphi}{a} \mathbf{u}_z$$

Integramos con el ángulo; como  $\mathbf{u}_z$  es un vector fijo puede salir de la integral:

$$\mathbf{B}_2(P) = \frac{\mu_o I}{4\pi a} \mathbf{u}_z \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi = \frac{\mu_o I}{2a} \mathbf{u}_z$$

También se puede aplicar a este caso la ecuación (6.15) de ejemplo 6.2 del libro de "Física para informática" V. López y M Montoya.

### 3. Los dos hilos rectos semiinfinitos

Para hacer esta parte más cómodamente hay que darse cuenta que, en realidad, los dos hilos semiinfinitos los podemos sustituir por un solo hilo infinito, debido a que la separación entre ambos es despreciable (según el enunciado). En este caso, la fórmula que nos da el campo (módulo) la podemos obtener del libro citado antes, ejemplo 6.1, ec. 6.13:

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi h}$$

donde  $h$  es la separación del hilo al punto  $P$  donde calculamos el campo,  $h = 2a/\pi$ ,

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi(2a/\pi)} = \frac{\mu_o I}{4a}$$

Ahora sólo queda averiguar la dirección del campo. Por ejemplo, por la regla de la mano derecha sabemos que el campo debe "entrar" en el papel, es decir, tiene dirección  $-\mathbf{u}_z$ ,

$$\mathbf{B}_3(P) = \frac{\mu_o I}{4a} (-\mathbf{u}_z)$$

Sumando las tres contribuciones,

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 = 0 + \frac{\mu_o I}{2a} \mathbf{u}_z + \frac{\mu_o I}{4a} (-\mathbf{u}_z)$$

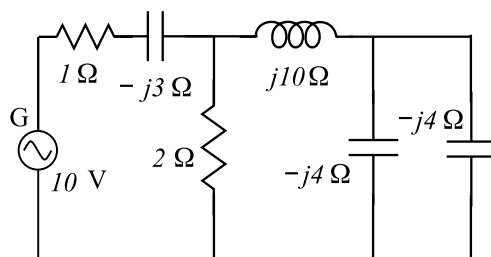
$$\mathbf{B}(P) = \frac{\mu_o I}{4a} \mathbf{u}_z$$

### PROBLEMA 1.2.3

En la figura P1.2.3 se muestra un circuito de corriente alterna en el que figuran los valores del generador en voltios y las resistencias, condensadores y autoinducciones en  $\Omega$ .

Calcular la corriente, módulo y fase, que suministra el generador G





**Figura P1.2.3**

### Solución

Este problema lo resolveremos calculando la impedancia conjunta del circuito que alimenta el generador, reduciendo las impedancias de las diversas ramas a su impedancia equivalente, para posteriormente despejar la intensidad de la ley de Ohm. Como recomendación genérica para este tipo de problemas es conveniente observar las siguientes reglas:

1. No reducir los denominadores complejos (multiplicando por el conjugado) hasta el final.
2. Manejar la forma binomial en los pasos intermedios.
3. Simplificar los factores comunes en los pasos intermedios.
4. Manipular números enteros o fraccionarios; sólo al final, si procede, convertir el resultado a números decimales.

Empezamos por las dos ramas del extremo que están en paralelo; su impedancia se obtiene aplicando la regla establecida en el apartado 11.5 del libro de "Física para informática" citado antes, y viene dada por,

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z_1} &= \frac{1}{-4j} + \frac{1}{-4j} = \frac{1}{-2j} \\ Z_1 &= -2j\end{aligned}$$

**No confundir *impedancia capacitiva* con *capacidad de un condensador*.**

Esta  $Z_1$  está a su vez en serie con la impedancia inductiva  $10j$ , luego,

$$Z_2 = Z_1 + 10j = 8j$$

$Z_2$  está en paralelo con la resistencia de  $2 \Omega$ ,

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z_3} &= \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8j} + \frac{1}{2} = \frac{1+4j}{8j} \\ Z_3 &= \frac{8j}{1+4j}\end{aligned}$$

Y esta impedancia está en serie con el condensador  $(-3j \Omega)$  y la resistencia  $(1 \Omega)$ ,

$$Z = Z_3 + 1 - 3j = \frac{8j}{1+4j} + 1 - 3j$$

Operando,

$$Z = \frac{8j + (1 - 3j)(1 + 4j)}{1 + 4j} = \frac{13 + 9j}{1 + 4j}$$

Para calcular la intensidad que suministra el generador aplicamos la ley de Ohm,

$$I = \frac{V}{Z} = 10 \frac{1+4j}{13+9j}$$

Multiplicamos el numerador y el denominador por el conjugado de éste,  $13 - 9j$  (véase observación 1 al principio del problema).

$$I_1 = \frac{49 + 43j}{25} \text{ A}$$

El módulo de la corriente es,

$$|I_1| = \frac{\sqrt{49^2 + 43^2}}{25} = \frac{\sqrt{170}}{5} \text{ A} \simeq 2,61 \text{ A}$$

y la fase,

$$\theta = \arctan \frac{\text{Im } I_1}{\text{Re } I_1} = \arctan \frac{43/25}{49/25} \simeq 41^\circ$$